



TITLE:

軸流中の回転体上の層流・乱流境界層について (回転流の数理)

AUTHOR(S):

山下, 新太郎; 渡辺, 崇; 中村, 育雄

CITATION:

山下, 新太郎 ...[et al]. 軸流中の回転体上の層流・乱流境界層について (回転流の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1075: 127-142

ISSUE DATE:

1999-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62619>

RIGHT:

軸流中の回転体上の層流・乱流境界層について

岐大・工 山下新太郎 (Shintaro Yamashita)
名大・情報メディア教育 渡辺 崇 (Takashi Watanabe)
名大院・工 中村育雄 (Ikuo Nakamura)

1. はじめに

回転流の問題は数多くあるが、ここで扱う流れは、軸対称物体が一様な軸方向の流れの中で、軸まわりに回転しているときに物体上に発達する境界層である。

この境界層の特徴は、図1にその速度分布を模式的に示すように、速度ベクトルが層外で子午線方向、壁面で方位角方向と薄い層内で90°向きを変え、著しい捻れを示す点にある(図1は境界層が物体に比べて過大に示してある)。この方位角方向速度成分のため遠心力が境界層全体に大きな影響を及ぼす。この流れを支配する代表パラメータは物体寸法に基づくレイノルズ数と速度比 Ω_m (代表周速度/代表軸流速度) であり、速度比は遠心力の効果を表す。遠心力は、物体表面が軸に対して傾いている場合には子午線方向の速度成分に増減速の直接的効果をもたらし、面が傾いていない場合(つまり円筒)でも、層内の圧力変化を生じ、境界層の発達に伴って増速効果をもたらし。後者は特に物体半径に対する境界層厚さとの関連で重要となり、この場合、横方向曲率の効果を考慮せねばならず、たとえ層流でも解析を容易でないものになっている。

この種の流れは特に工学的な問題と関連しており、実用上の重要性と理論的な興味からこれまで多くの研究が行われてきた。ここでは著者等がこれまでに明らかにしてきた、層流境界層の基本的特性、特にはく離に対する回転の効果と、乱流境界層の特性について述べることにする。

2. 回転体上の境界層の概略

軸対称物体が軸流中で回転している場合に生じる流れの問題については、著者らによる簡単な解説がある⁽¹⁾⁽²⁾。研究の歴史的な経緯からは、特に回転球の抵抗に及ぼす回転の効果に注目され、その抵抗はレイノルズ数と回転数によって

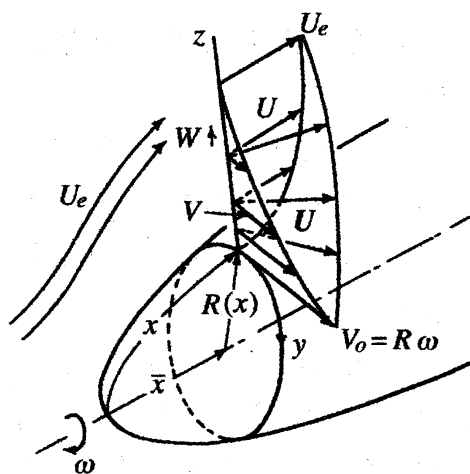


図1 流れの模式図

複雑に変化する。これは、境界層の乱流遷移のみならず、はく離位置がレイノルズ数と速度比の影響を受け、これらの複合作用として、はく離に到るまでの流れの状態と、はく離の位置が決まるためである。このような複雑な現象を明らかにするためには、パラメータを特定した解析とよく制御された実験が必要である。

この流れの問題の中で最も基本的なものは、半無限長の円筒が軸流中で回転している場合である。この中でさらに単純なものは円筒の半径が境界層厚さに比べて十分大きく、半径効果が無視できる場合の層流境界層である。これは Howarth によって調べられ⁽³⁾、方程式は軸方向速度分布が回転に独立となり、その解はブラジウスの分布となる。

この基本的な場合から発展する次の問題には二つの重要なものが考えられる。一つは物体の横方向曲率は変化するが、境界層厚さは物体寸法に比べて薄い場合である。この場合の層流境界層は静止物体に近い程度まで解明が進んでいる。多くの研究の中で、最も一般的と思われる解析が中村⁽⁴⁾によって行われ、任意鈍頭形状物体、任意主流速度分布に対して普遍関数列が求められた。例として球に適用した結果を図2に示す。これははく離点での速度分布の回転による変化で、速度比の増加によってはく離点速度分布がはく離していない形状に変化するの分かる。

いま一つの問題は、半径は一定の円筒であるが、境界層厚さが円筒半径に比べて厚くなり、横方向曲率の影響を無視できなくなった場合である。この流れでは、上記の流れもそうであるが、軸（子午線）方向速度分布はもはや回転と独立ではなくなる。本稿は、このような場合の層流と乱流の境界層を調べたものである。特に層流の場合は、はく離に及ぼす回転の効果を明らかにした。

3. 回転円筒上の層流境界層のはく離流れ

逆圧力こう配下を発達する層流境界層は減速されはく離を生ずる。層外圧力こう配を規定した二次元境界層方程式は、はく離点において Goldstein 形の特異性を持つとされている⁽⁵⁾。この特異性のために、通常の計算ははく離点に近づくと不安定になり、それ以降は計算は進められなくなる。はく離の構造、特異性

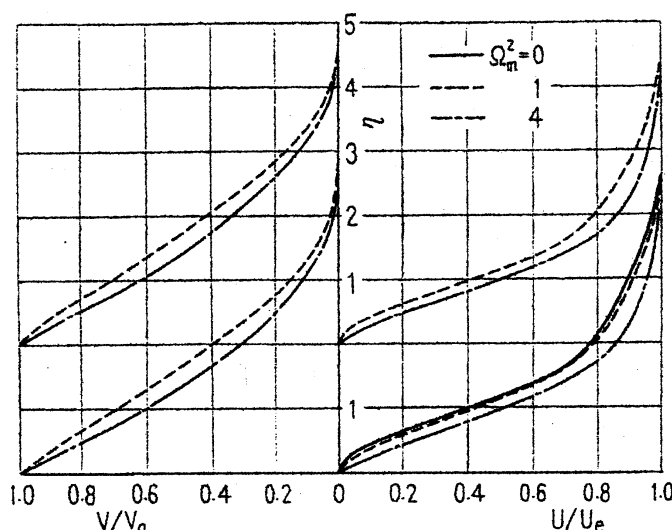


図2 回転球の層流はく離点での速度分布変化
下: $\Omega_m^2 = 0$ のはく離点位置 ($\theta = 79.60^\circ$)
上: $\Omega_m^2 = 1$ のはく離点位置 ($\theta = 80.62^\circ$)

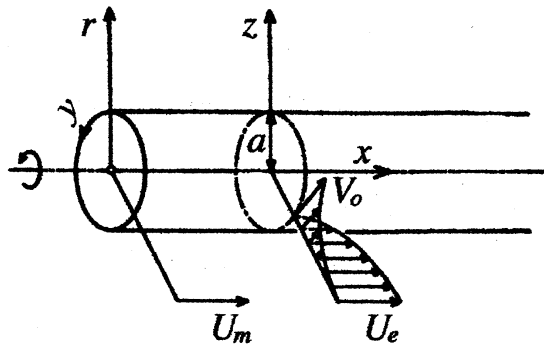


図3 座標系

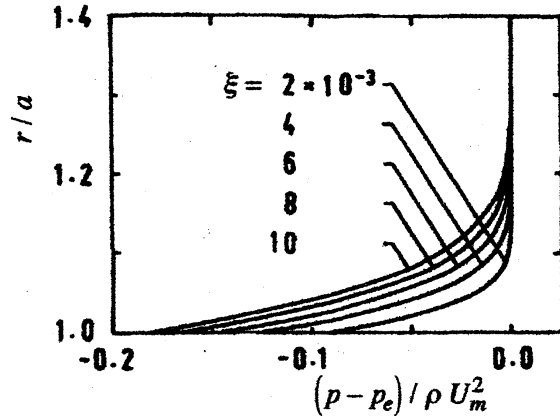


図4 境界層内の圧力分

についての解析的、実験的研究はいくつか行われているが、回転体上の流れに関連したはく離に及ぼす物体回転の効果の研究は、前節で述べたような物体半径が変化することによる遠心力の子午線方向成分の影響を調べたもののみである。ここでは、層外主流速度が前縁からの距離に対して直線的に変化する Howarth 形の場合、この流れの中で回転する円筒上の層流境界層が、回転によって誘起される圧力こう配によっていかに変化するかを数値的に調べる。

3.1 基礎式と数値計算 座標系を図3に示すようにとれば、境界層厚さを円筒半径と同程度としたときの連続式と境界層方程式、境界条件は以下ようになる。

$$(rU)_{,x} + (rW)_{,z} = 0 \quad (1)$$

$$U U_{,x} + W U_{,z} = -P_{,x} / \rho + \partial(r\tau_x)_{,z} / \rho r \quad (2a)$$

$$U V_{,x} + W V_{,z} + V W / r = (r^2 \tau_y)_{,z} / \rho r^2 \quad (2b)$$

$$V^2 / r = P_{,z} / \rho \quad (2c)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \mu U_{,z} \\ \tau_y &= \mu (V_{,z} - V / r) \end{aligned} \right\} \quad (2d)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0; \quad U=W=0, \quad V=V_0 \\ z \rightarrow \infty; \quad U \rightarrow U_e, \quad V \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

数値的に取り扱いやすい形にするため、無次元変数 $\xi = vx / U_e a^2$ と $\eta = \sqrt{U_e / vx} (r^2 - a^2) / 2a$ の導入、および Stokes の流れの関数 ψ を

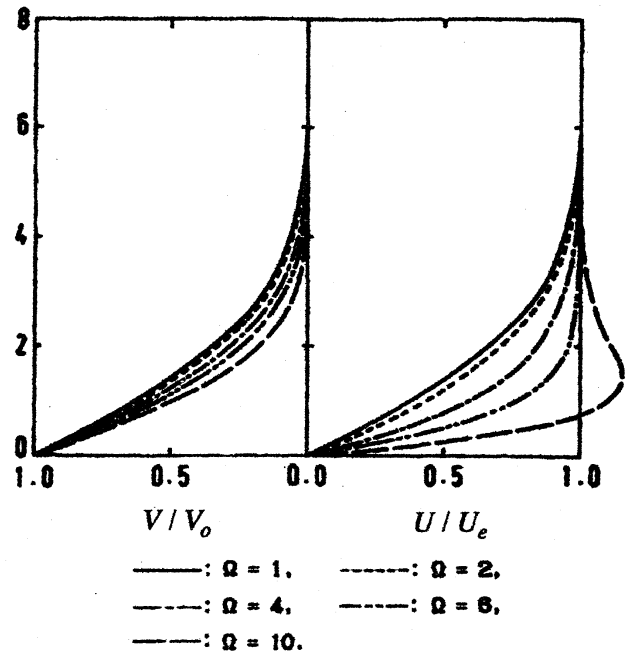
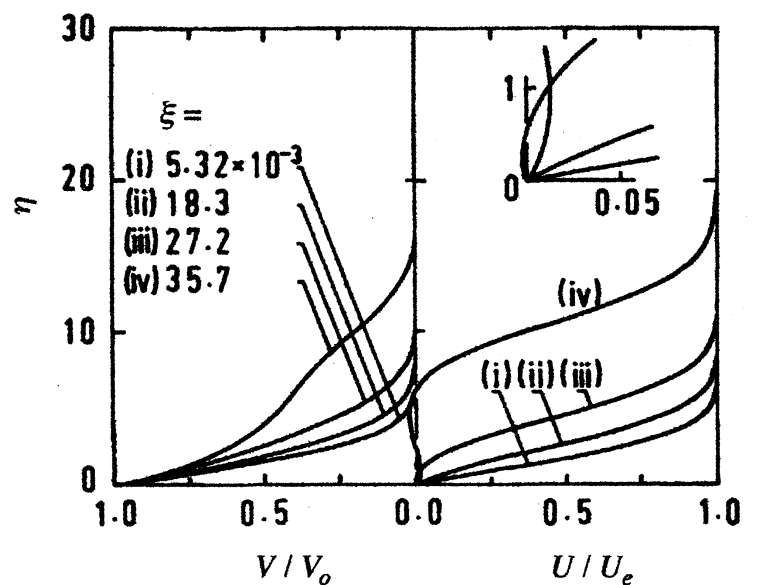


図5 速度比による速度分布の変化

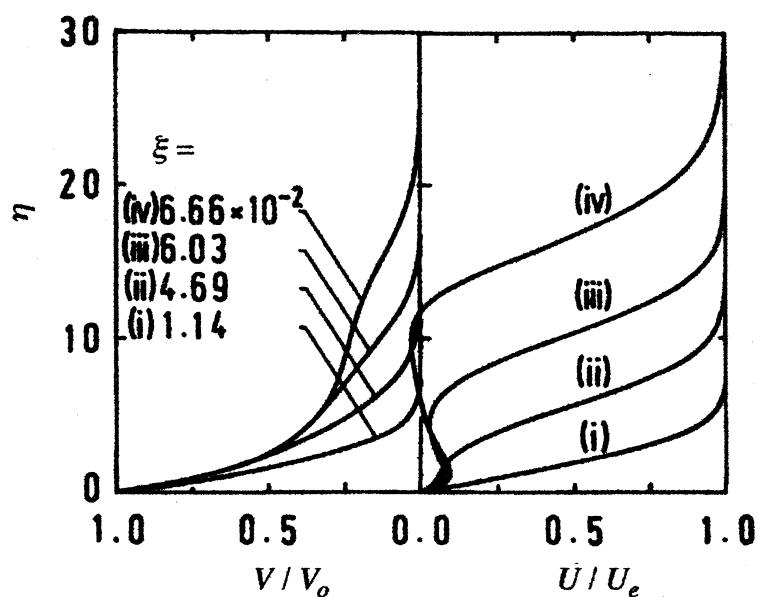
$f(\eta) = \psi / \sqrt{U_e \nu x a}$, 無次元周方向速度を $V_1 = V/V_0$ として, 式(1)~(3)を変換する. 変換した式をここでは Keller の Box 法⁽⁶⁾により計算した. 円筒前縁での初期条件としては, f' および $1 - V_1$ にそれぞれ Blasius の速度分布を用いた. 層外主流速度は平板の Howarth 流れ $U_e = U_m - cx$ である.

はく離を生じる流れを厳密に扱うには, より詳しい解析を要すると思われるが, 以下に示すように, 本方程式系では壁面上のはく離点は特異性を示すことはなかった. このため, はく離点を越えた場合にも x 方向へ順次積分していく方法を適用した. 境界層方程式を解く場合, 逆流が生じると解の依存領域の問題が生じ⁽⁵⁾, いくつかの修正計算法が提唱されている. しかし, 逆流の程度が相対的に小さい間は逆流による影響は小さいとされており⁽⁷⁾, 本計算では修正は行っていない.

3.2 計算結果 まず, 圧力こう配のない流れで円筒回転の効果を示す. 図4は ξ をパラメータとした層内外の圧力差の分布である. 周方向速度成分により, 境界層厚さ方向に圧力変化が引き起こされ, また層内で順圧力こう配がもたらされることがわかる. 順圧力こう配作用は軸方向速度成分を増速させる. この程度が速度比 ($\Omega = V_0/U_e$) によってどのように変化するかを示したのが図5である. 速度比が増すと, 軸方向速度成分は増速され, 大きな Ω では主流速度を越えるようにさえる.



(a) $ca^2/\nu = 12$, $\Omega = 0.65$



(b) $ca^2/\nu = 12$, $\Omega = 1.0$

図6 速度分布

次に逆圧力こう配下の流れの計算結果を示す。圧力こう配の程度は無次元値 ca^2/ν ($c = -dU_e/dx$) で代表させている。 Ω が 0.65, 1.0 の場合の速度分布をそれぞれ図 6 (a), (b) に示す。

$\Omega = 0.65$ の場合、逆圧力こう配下を発達してくる流れの軸方向速度成分は減速され、ある ξ においてその壁面のこう配は正から零、ついで負となり、その下流では壁面近傍で逆流が生じる。その後、壁面の速度こう

配は負から零、そして再び正へと変化する。 $\Omega = 1.0$ の場合は回転による順圧力こう配作用が強まり、壁面ではく離しない流れとなっている。しかし、逆圧力こう配の効果の強い境界層中央部では逆流が生じている。

図 6 に対応する層外と壁面の圧力分布を図 7 に示す。図 6 のような流れが生じているときの壁面圧力分布を見ると、 $\Omega = 0.65$ の場合には、回転による順圧力こう配作用のため、その逆圧力こう配の程度は層外に比べて緩慢であり、さらに、はく離が生じている $\xi = 2.5 \times 10^2$ あたりからは次第に順圧力こう配へと変化しているのが分かる。 $\Omega = 1.0$ の場合は回転による順圧力こう配作用がさらに強いことが分かる。

$\Omega = 0.65$ に対する速度分布 (図 6 (a)) から想像できるように、この流れは壁面ではく離と付着を起こしており、これが起きるか否か、あるいはどこで生じるかは逆圧力こう配の程度と、速度比に依存している。これを見るために、いくつかの逆圧力こう配のもとで、はく離点と付着点の変化の様子を示したのが図 8 である。図中実線がはく離位

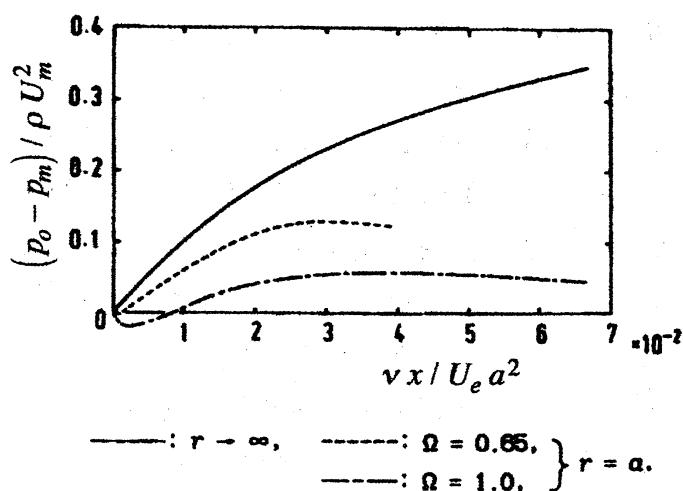


図 7 層外と壁面の圧力分布

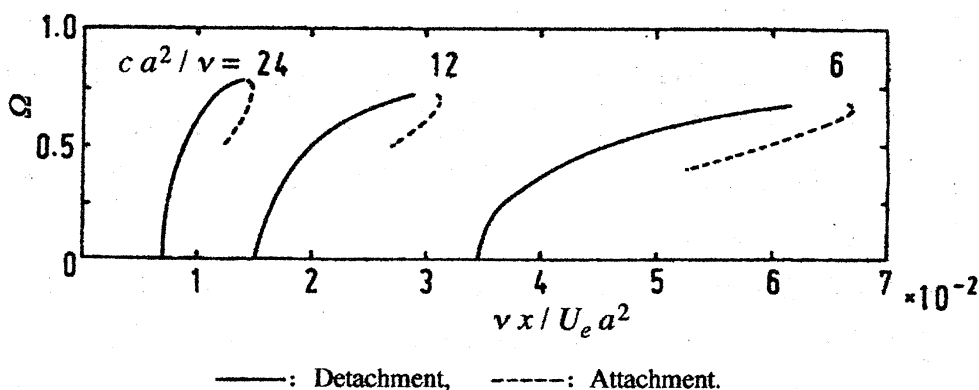


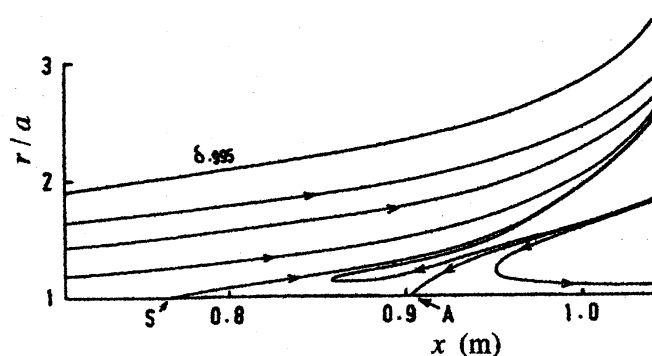
図 8 速度比によるはく離点、付着点の移動

置、点線が付着位置である。圧力こう配パラメータ ca^2/ν つまり逆圧力こう配の程度が大きくなるにしたがって、はく離はより上流側で生じている。また、速度比が増すと、はく離点が下流に移動している。付着点も速度比が増すと下流側へ移動する傾向にあるが、速度比がある程度大きくなると、はく離点と付着点は急速に接近するようになる。そして、ある値以上の速度比になると、壁面からののはく離は生じ得ない流れとなる。

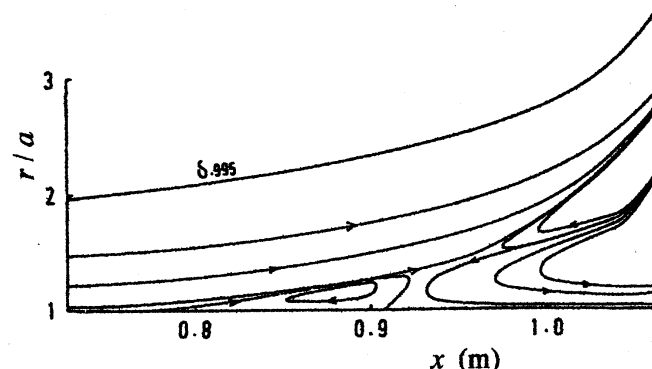
このような速度比の変化による流れの変化の様子を図9(a),(b),(c)に示した。これらは、 $\Omega = 0.65, 0.66, 0.73$ に対する $x-z$ 面内の流線である。

$\Omega = 0.65$ の場合には、はく離した後逆流域がもたらされ、境界層厚さの急増が見られる。流れが付着した後は逆流域が境界層中央部へと移動していく様子がよく分かる。はく離点からの流線と付着点への流線が連なっているか否かは本計算の範囲では不明である。 $\Omega = 0.66$ になると、はく離点からの流線は下流の付着点への流線と連なり、はく離ほうが存在していることが明らかである。さらに下流では、境界層中央部にはく

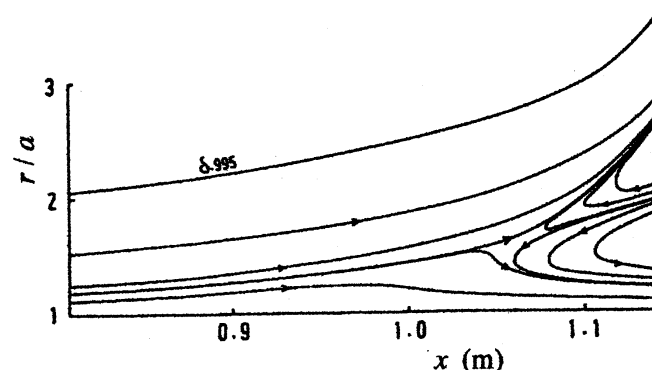
離した流れとは別の逆流域が生じている。 $\Omega = 0.73$ では、流れのはく離は認められなくなるが、下流の境界層中央部には逆流域がやはり生じている。図9(b),(c)に見られるような逆流では、流れの中によどみ点が存在しているが、このよどみ点が O' Brien⁽⁸⁾ の提唱した直交あん点に相当するか否かについては、別に解析する必要がある。



(a) $\Omega = 0.65$



(b) $\Omega = 0.66$



(c) $\Omega = 0.73$

図9 回転軸を含む面内の龍線

$$ca^2/\nu = 12, U_m a/\nu = 1000, a = 0.04 \text{ m}$$

D: Detachment point A: Attachment point

3.3 境界層内の特異性 規定された層外圧力こう配のもとでは、二次元境界層方程式に基づく計算ははく離点近傍で不安定となる。この特異性の存在は、Curle の式により推論される⁽⁵⁾。すなわち、 z により 2 回微分した境界層方程式の壁面での条件は、

$$d[(\partial U/\partial z)_0^2/2]/dx = \nu \partial^4 U/\partial z^4 \Big|_0 \quad (5)$$

であり、はく離点で右辺が零でない場合、はく離点近傍では $(\partial U/\partial z)_0 \sim (x_s - x)^{1/2}$ (x_s : はく離点の位置) となり、数値的に不安定となる。軸流中の静止円筒上の境界層では同様なことが言える。しかし、円筒が回転すると、式(5)に相当する式に、 x に依存する新たな項が付け加わり、これがはく離点近傍で $(\partial U/\partial z)_0 \sim (x_s - x)^{1/2}$ であることによるはく離点での特異性を除去することになる。本計算が計算法を何ら変更することなく、はく離点を越えて結果が得られたのはこのためと考えられる。

4. 回転円筒上の乱流境界層

乱流境界層の研究はこれまで大きく二つの方向に進んできた。一つは乱流の微細構造と整構造の研究で、主として平板乱流境界層やチャネル乱流について行われ、現在は壁近くの渦の構造と発達、内・外層の組織運動の相互作用が主要な問題となっている。いま一つは、Bradshaw が提起した複合乱流 (Complex Turbulent Flows) に対する研究で、複数のせん断層の干涉、複雑な境界条件や体積力の作用、付加歪み速度の影響等が重要な流れ場の問題である。この複合乱流は実用上の問題のみならず、一般のせん断乱流、特に二次元ほど解明の進んでいない三次元乱流の特性解明のためにも重要である。

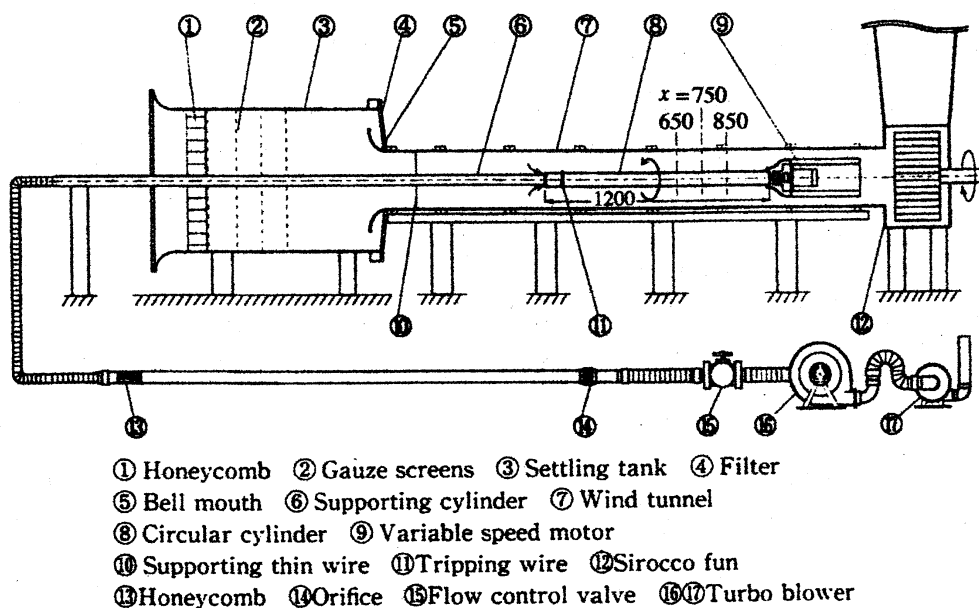


図 10 実験装置全体

軸流中の回転円筒上の乱流境界層はこのような流れの中の基本的で系統的研究の可能な問題である。ここでは、この乱流境界層についての実験結果を述べる。

4.1 実験装置 図 10 に実験装置全体を示す。回転円筒は

半径 40 mm, 全長約 1200 mm のアルミニウム合金製で、その表面は滑らかである。円筒の前縁はナイフエッジとし、吸い込みを行うことによって円筒前縁に一樣流が流入するようにしてある。前縁から 100 mm 下流には乱流遷移促進のためのトリップワイヤが設置してある。測定断面は円筒全体にわたっているが、ここで述べるのは、主として図 10 に示す乱流発達域の $x = 650, 750, 850$ mm の 3 断面での結果である。層外圧力は、やや順圧力こう配となっているが、ほとんど無視できる程度である。

図 11 に流れ場の模式図と座標系を示す。実験はレイノルズ数 Re を 3×10^4 とし、基準速度比 Ω_m を 1.5 まで変えた。境界層の測定には熱線流速計を用い、I 型と傾斜型プローブの回転法、X 型、V 型プローブを局所平均流方向に向ける方法等を併用して、平均速度、変動速度、レイノルズ応力を測定した。

4.2 平均速度場 平板乱流境界層においては、支配スケールの違いにより壁法則、速度欠損法則が導かれ、それらの重なり合う領域として対数領域が同定され、境界層の多層構造の概念が確立している。

回転円筒上の乱流境界層の平均速度分布は、図 1 と 11 に模式的に示したようなもので、軸方向と周方向の速度成分の分布は、それぞれ乱流の性状を示していた。この境界層は遠心力と横方向曲率の影響下にあり、平板境界層と同様の多層構造があるとしても、それを具体的に明確にすることが一つの課題である。平板乱流境界層と大同小異であるとすれば、代表的な対数領域で平板と同じ対数法則が成立するはずである。このことは、合成速度について調べるべきかも知れないが、周方向速度成分は層外圧力こう配の影響を直接的には受けないので、まずこれについて調べてみた。

図 12 は円筒に固定した系から見た周方向速度分布を、平板乱流境界層の対数速度分布に基づいた Clauser 線図の形でプロットした一例である。この結果は、図 10 に示した円筒での実験結果ではなく、鈍頭部を有する半径 70 mm の円筒上の境界層の結果⁹⁾で、図中 V_τ は周方向摩擦速度、 x は回転体頭部よどみ点からの軸方向距離、 $c_{f\theta}$ は周方向摩擦抵抗係数である。境界層厚さは円筒半径に比べて極端に厚いわけではないので、半径効果は無視した表現であるが、二次元の Clauser 線図、したがって、平板の

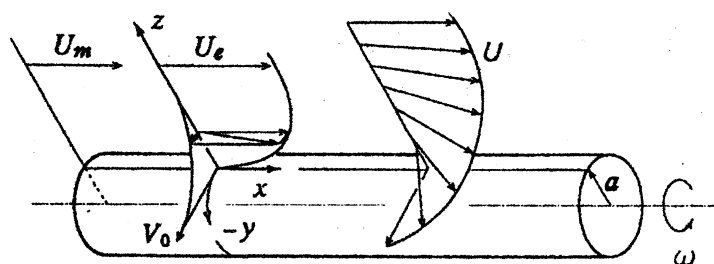


図 11 流れ場と座標系

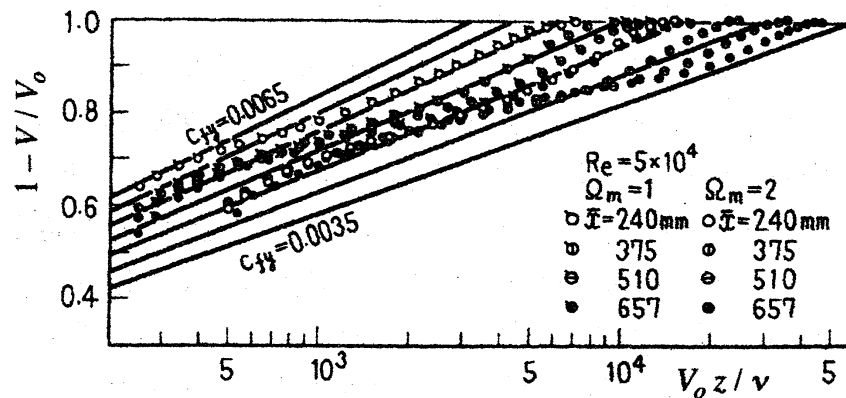


図 12 周方向速度成分に対する Clauser 線図, $a = 70 \text{ mm}$

対数速度分布ではこの回転円筒上の乱流境界層の速度分布を表現できないことが見て取れる。ただし、回転円すい体上の乱流境界層の場合は平板の対数法則が妥当した⁽¹⁰⁾。これは下流方向への境界層の発達と同時に円すい体の局所の半径も増加するので、境界層厚さは相対的に厚くならないためと考えられる。

横方向曲率の効果は静止円筒でも境界層厚さが円筒半径に比べて無視できなくなると問題となり、対数速度分布についてはいくつかの議論の後、次の Rao⁽¹¹⁾ の提唱した式に落ちついたようである。

$$U/U_\tau = A \log [(U_\tau a / \nu) \ln (r/a)] + B \quad (6)$$

係数 A , B には平板の値が用いられ、境界層厚さが円筒半径を越えるような場合でもよく適合することが確かめられている⁽¹²⁾。

円筒が回転すると、さらに遠心力の影響を受ける。著者等はこれまでにこの種の乱流境界層の周方向の壁法則と普遍速度分布としての対数法則について、それぞれ、

$$[V_0 - (a/r)V]/V_\tau = f((V_\tau a / \nu)(r^2 - a^2)/2r^2) \quad (7)$$

$$[V_0 - (a/r)V]/V_\tau = A \log [(V_\tau a / \nu)(r^2 - a^2)/2r^2] + B \quad (8)$$

が成立すべきことを示した⁽⁹⁾。これらは、 $a \rightarrow \infty$ で平板の関係式と一致する。実験的な検証には壁面せん断応力の計測が必要であるが、運動量積分方程式を利用した大略の見積もりから、係数 A , B は平板の値とはかなり異なり、円筒のレイノルズ数の他に速度比に強く依存することが明らかとなった。なお、対数領域の速度欠損法則表示の具体形については、伊藤ら⁽¹³⁾が与えた。

このように、回転円筒上の乱流境界層は境界層厚さと円筒半径の比がある程度大きくなると、平板乱流境界層の対数速度分布が妥当しなくなる。著者等はより普遍的な法則として、合成速度に対する壁法則、対数法則を導出した。つまり、円筒とともに回転する相対的な非粘性流の方向を一つの座標軸とする座標系での運動方程式に基づき、この

方向における対数速度分布を次のように導いた⁽¹⁴⁾。

$$(U_{R0}/U_R)(U_1/U_{1\tau}) = A_1 \log [(U_{1\tau}a/\nu)(r^2 - a^2)/2r^2] + B_1 \quad (9)$$

ここで、 U_1 、 $U_{1\tau}$ はそれぞれ相対主流方向の平均速度成分と摩擦速度、 U_R 、 U_{R0} はそれぞれ非粘性流の相対速度とその壁面での値である。係数 A_1 、 B_1 は上記と同様未知である。これに対しては、壁面せん断応力を微小プローブによって壁面近傍の速度分布から評価し、運動量積分方程式による確認を経て、本実験の範囲で第一近似として、 $A_1 = 4.2$ 、 $B_1 = 7.5$ を得た (log は常用対数とする)。平板乱流境界層に比べると、 A_1 が小さく、 B_1 が大きくなっている。これは、現象論的には混合距離が長くなっていることに相当する。

式(9)に基づいた本実験の速度分布を図 13 に示す。式(9)でよく表現されることが分かる。しかし、式(9)とその係数は、 $a \rightarrow \infty$ では平板の関係式に、 $\Omega_m \rightarrow 0$ では静止円筒の式(6)に一致すべきであることから、より普遍的な表現としては、さらに煮詰める必要がある。

一方で、三次元乱流境界層の対数法則についてはこれまでに各種の提唱がなされており、Ölçmen と Simpson⁽¹⁵⁾ が列挙して検討しているが、本流れ場に対するこの適応性を調べてみる。彼等の列挙したものうち、ここで適応できるのは円筒固定の座標系を用いて、以下の 4 種類である。

Johnston : $U_s/q_\tau \cos \beta_0 = A \log (z q_\tau/\nu) + B \quad (10)$

Pierce らと Chandrashekar ら :

$$U_s/q_\tau (\cos \beta_0)^{0.5} = A \log [z q_\tau (\cos \beta_0)^{0.5}/\nu] + B \quad (11)$$

Coles : $q \cos (\beta_0 - \beta)/q_\tau = A \log (z q_\tau/\nu) + B \quad (12)$

Hornung ら : $q/q_\tau = A \log (z q_\tau/\nu) + B \quad (13)$

ここで、 q 、 q_τ はそれぞれ速度の大きさと摩擦速度、 U_s は速度の主流方向成分、 β 、 β_0 はそれぞれ速度と壁面せん断応力の主流に対する角度である。

本実験の速度分布をこれらの提案式に従ってプロットすると、図 14 (a)~(d) のようになる。総じてよくまとまっているが、係数 A 、 B の値は式(9)も含めて、それぞれで異なり、平板境界層の値とも大きく異なる。さらに、これらの係数にはかなりの任意性

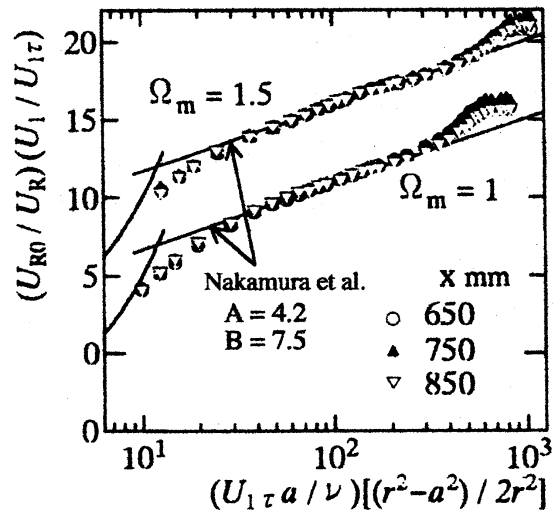
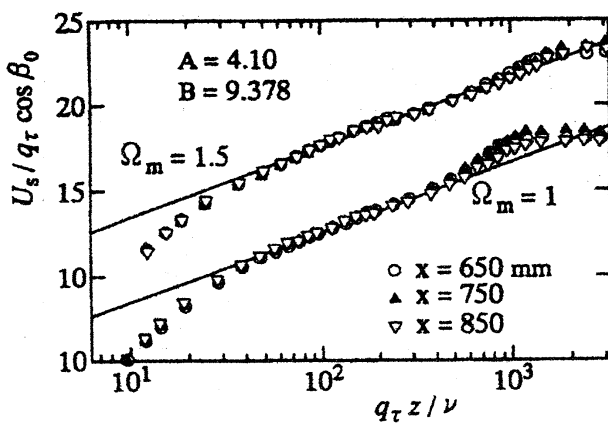
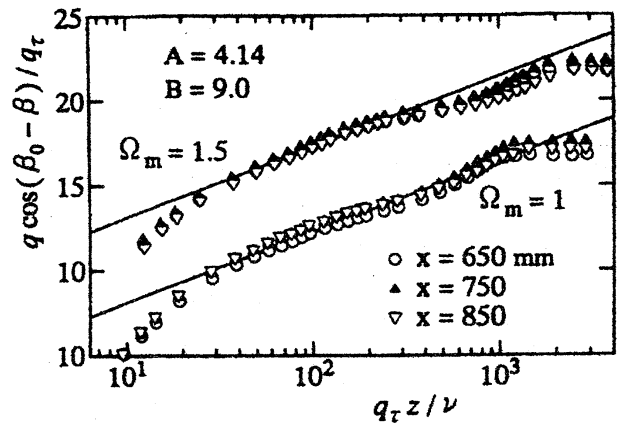


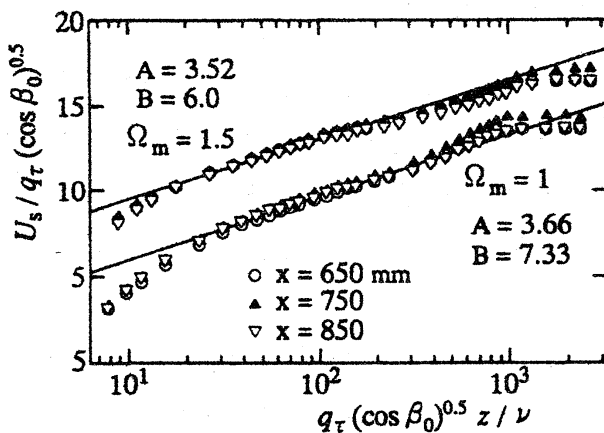
図 13 式(9)に基づく対数速度分



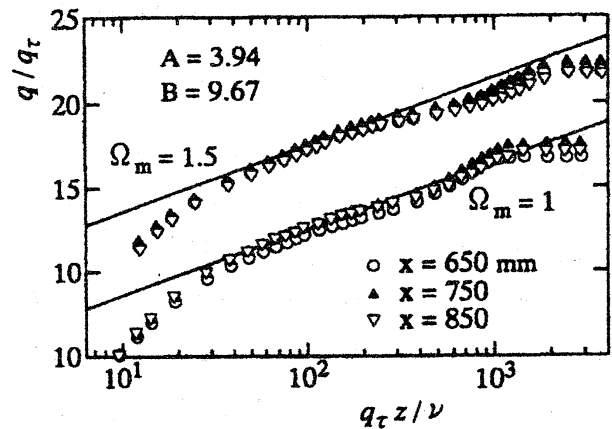
(a) Johnston



(c) Coles



(b) Pierce らと Chendrashekar ら



(d) Hornung ら

図 14 三次元流の対数速度分布の適用

がつきまとなっている。この意味で、対数法則のような相似性に依存しない壁面せん断応力の精度の良い測定が望まれる。提案式(10)~(13)の中では、強いて言えば、Johnstonの式の適応性がよいといえる。しかし、本流れ場のような場合に限れば、基礎方程式との整合性から曲率効果を考慮した著者等の対数速度分布が、さらに検討を要するとしても、より妥当であると言えよう。

4.3 乱流構造 レイノルズ応力6成分の測定結果に基づき、まず乱れ場の現象論的な特徴を表す混合距離の変化を図15に示す。旋回流の混合距離は次式で与えられる[例えば文献(16)]。

$$l_i^2 = \nu_{Ti} / \sqrt{(\partial U / \partial r)^2 + [r \partial(V/r) / \partial r]^2}, \quad i = x, y \quad (14)$$

ν_{Ti} は x, y 方向の渦動粘度で、測定したレイ

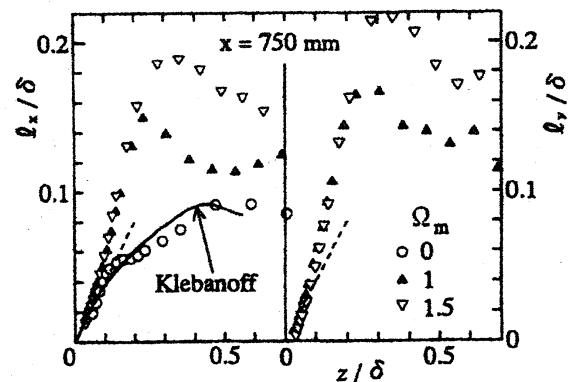


図 15 混合距離の変化

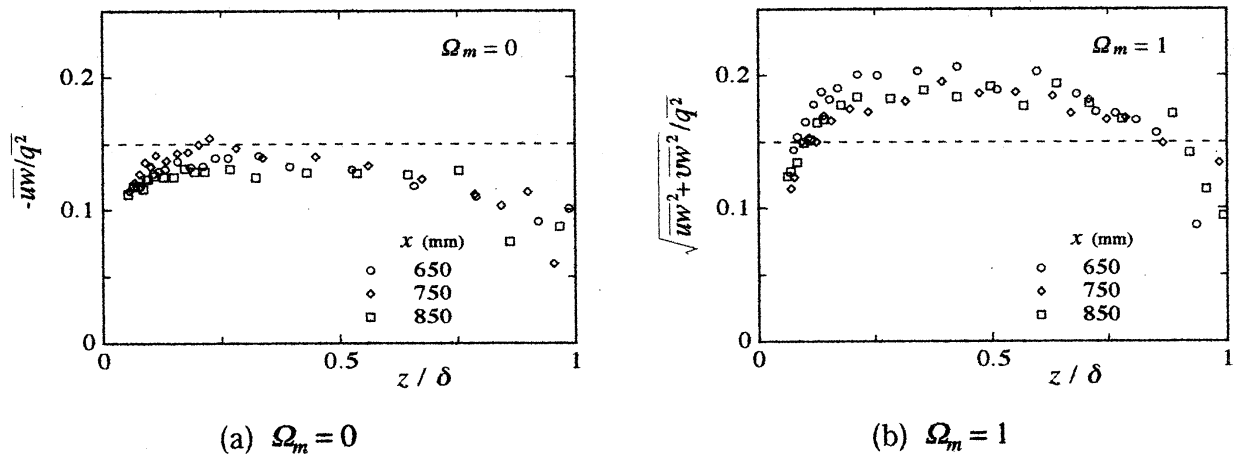


図 16 構造パラメータの分布

ノルズ応力と平均速度こう配から見積もられる。図中、破線は平板境界層の壁近くの $l = \kappa z$ (κ : Kármán 定数 = 0.4) を表す。円筒が回転すると、内層では混合距離は $l = 0.4z$ の関係より大きなこう配で増加し、境界層中央部で大きな値を示す。このような混合距離の壁からの距離に対するこう配の増加が、図 13, 14 に示したような対数直線部分のこう配の減少と対応している。

乱流構造の平板乱流境界層との相違を陽に示すために、せん断応力と乱れ強さの比、つまり構造パラメータを図 16 (a), (b) に示す。ここで、 u, v, w は変動速度の x, y, z 成分、 q^2 は全乱れエネルギーの 2 倍で、 $\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$ である。まず静止時の図 16 (a) より、境界層中央部つまり $z/\delta \approx 0.2 \sim 0.7$ で、その値は約 0.14 である。これは零圧力こう配下の平板乱流境界層と同程度であり、円筒静止時の境界層は平板境界層と大差ないといえる。三次元流に対しては、せん断応力として $\sqrt{\overline{uw^2} + \overline{vw^2}}$ を用いるのが妥当であり、図 16 (b) にこの時の構造パラメータの分布を示す。境界層中央部でその値は 0.18 ~ 0.19 となっており、平板乱流境界層より大きく、構造的に異なると言える。さらに、圧力駆動の三次元乱流境界層では通常この値が小さくなるのと対照的である。これは、本流れのようなせん断駆動の三次元流と圧力駆動の流れとの構造的な相違を示すものと思われる。

乱流境界層の構造を調べる上で、平均流エネルギーと乱れエネルギーの収支を明らかにすることは一つの重要なステップである。平均流エネルギー $Q^2/2$ に対する方程式は、境界層を円筒半径と同程度とした上で境界層近似して、次式で表される⁽¹⁷⁾。

$$\begin{aligned}
 & U(Q^2/2)_{,x} + W(Q^2/2)_{,z} + (U/\rho)P_{,x} + (W/\rho)P_{,z} \\
 & = \overline{uw}U_{,z} + \overline{vw}r(V/r)_{,z} + \overline{w^2}W_{,z} - \overline{v^2}W/r - [r(\overline{uw}U + \overline{vw}V + \overline{w^2}W)]_{,z}/r \\
 & \quad - \nu[(U_{,z})^2 + |r(V/r)_{,z}|^2 + \nu|r(U^2)_{,z} + r^3\{(V/r)^2\}_{,z}]/2r
 \end{aligned} \tag{15}$$

同様に、乱れエネルギー方程式は次式となる。

$$U(\overline{q^2}/2)_{,x} + W(\overline{q^2}/2)_{,z}$$

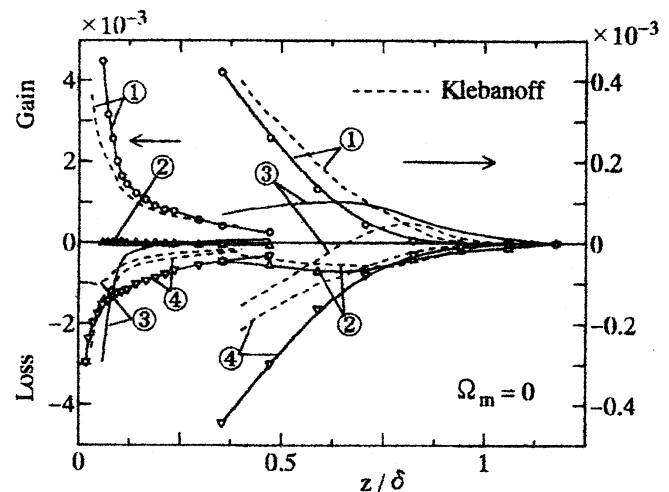
$$= -\overline{uw}U_{,z} - \overline{vw}r(V/r)_{,z} + D - \varepsilon \quad (16)$$

式(16)の右辺第1項と第2項は、乱れエネルギー生成項、 D, ε はそれぞれ乱流拡散、粘性散逸である。生成項の第1項は、通常の平板乱流境界層と同じである。第2項は円筒の回転により生ずるもので、これにより V の平均流エネルギーが直接的に u 変動に注入される。

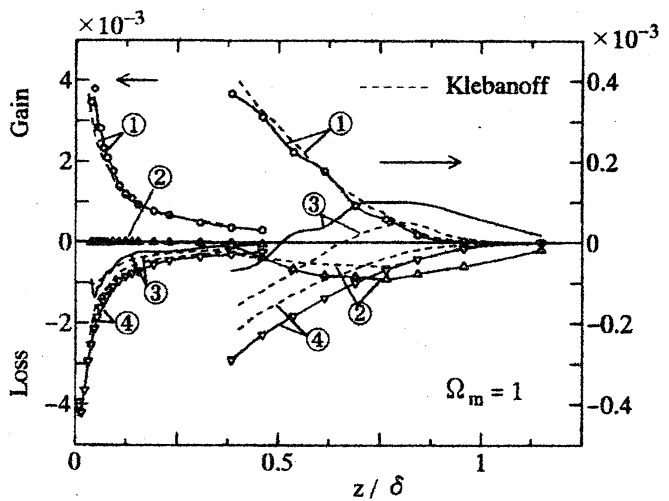
円筒が回転している場合の平均流エネルギー収支の特徴は、エネルギーが層外主流のほかに壁面からも供給され、層内の平均流エネルギーの分布が一様化されるため、ここには示さないが、層内の対流と拡散が相対的に減少することである。

乱れエネルギー収支の結果を速度比ごとに図 17 (a), (b), (c)に示す。各値は U_{R0} と δ により無次元化されている。図では $z/\delta \approx 0.4$ を境として内部層は左側、外部層は右側の座標で示されている。円筒静止時の場合、平板境界層の Klebanoff⁽¹⁸⁾ の結果と比べると、散逸と拡散に若干の相違が認められる。ただし、境界層にわたる積分が零となるべき拡散の値が、Klebanoff の結果では零にならないので、比較することにそれほど意味はない。

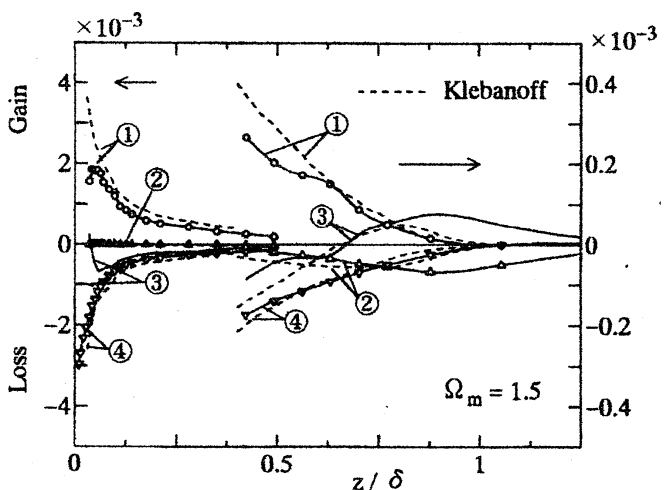
円筒が回転すると、各項の絶対値は増大するが、図 17 (b), (c)に示すように無次元値の絶対値はほとんど変化しないか、わずかに減少し、平板境



(a) $\Omega_m = 0$



(b) $\Omega_m = 1$



(c) $\Omega_m = 1.5$

図 17 乱れエネルギー収支.

①生成 ②対流 ③拡散 ④散逸

界層との著しい相違は認められない。円筒静止時と同様、境界層全域で生成と散逸が支配的で、両者はほぼ釣り合っている。このように、回転時にも生成と散逸がほぼバランスしていることは、平衡境界層であることを示唆するものであり、平均速度場に対して、4.2 で述べたような普遍速度分布の成立に対する保証の一つを与えるものと考えられる。

変動速度のスペクトルテンソルは、乱流構造の中でもエネルギーの波数空間での輸送や、レイノルズ応力のような速度相関の波数空間における特性を調べる上で重要である。本実験では、 u, v, w に対する一次元エネルギースペクトルの特性を明らかにし、さらに、変動速度成分間のクロススペクトルを調べた。ただし、瞬時の u, v, w の同時測定は本実験では困難であったので、Xプローブを局所平均流方向に向けて、この方向の変動速度成分 u^* と w に基づくクロススペクトルを求めた。ここではクロススペクトルについて述べる。 u^* と w のクロススペクトルは、一般的なスペクトルテンソルより次式となる。

$$\phi_{u^*w}(k^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{u^*w}(r^*) e^{-ik^*r^*} dr^* \quad (17)$$

ここで、 k^*, r^* はそれぞれ x^* 方向（局所平均流方向）の波数と距離であり、 $R_{u^*w}(r^*)$ は x^* 軸上の2点相関である。クロススペクトルは複素関数であり、次のように実数部と虚数部に分けられる。

$$\phi_{u^*w}(k^*) = K_{u^*w}(k^*) - i Q_{u^*w}(k^*) \quad (18)$$

K_{u^*w} はコスペクトル、 Q_{u^*w} はクオドスペクトルで、コスペクトルは、

$$\overline{u^*w} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{u^*w}(k^*) dk^* \quad (19)$$

の関係を満足し、レイノルズ応力のスペクトルを表す。

本流れ場の $x = 850 \text{ mm}$ の位置での u^* 変動のパワースペクトルおよび u^* と w 変動のコスペクトルを、円筒静止時と回転時についてそれぞれ図 18 と図 19 (a) に示す。また、回転時のクオドスペクトルを k^* の正の範囲について図 19 (b) に示す。パワースペクトルとコスペクトルは、全波数域で個々の積分値が1となるよう正規化し、クオドスペク

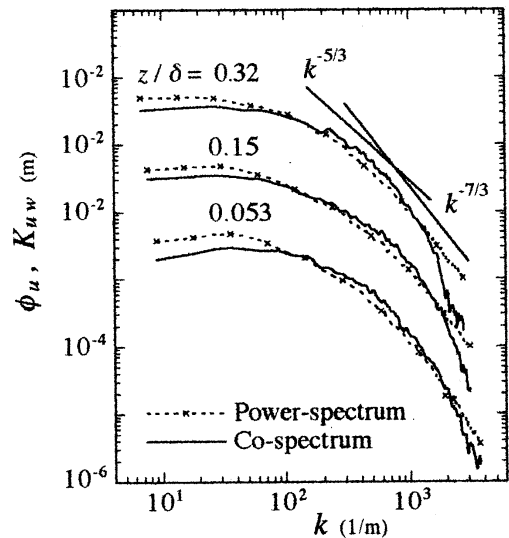


図 18 円筒静止時の u 変動のパワースペクトルと u, w 変動のコスペクトル

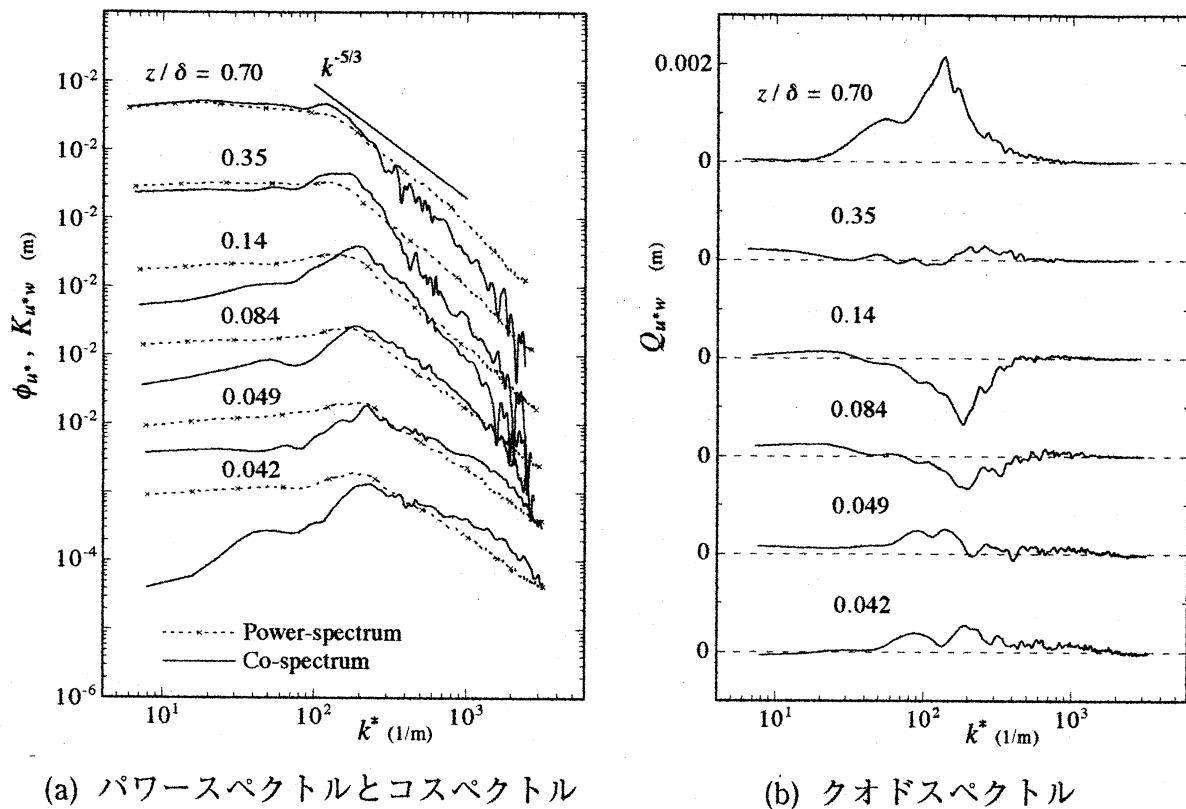


図 19 円筒回転時の u^* 変動のパワースペクトルと u^*, w 変動のクロススペクトル

トルはコスペクトルの正規化に用いた値で除した。

図 18 の円筒静止時に結果から、特に外層でコスペクトルの方がパワースペクトルより高波数域での減衰が早いのが見て取れる。図 19 (a)に示す円筒回転時には、回転による渦スケールの微細化が生じ、散逸領域での乱れエネルギーが相対的に増加している。また、円筒静止時と同様、外層の高波数域でコスペクトルの減衰が早い。

円筒回転時のスペクトルの顕著な特徴は低波数域に見られ、パワースペクトルの分布に山が現れることである。これは層内に存在すると思われる比較的規則的な大規模渦構造に対応する。コスペクトルにはこの山が顕著に現れており、大規模渦に相当する波数でレイノルズ応力生成が強いことを示している。

図 19 (b)のクオドスペクトルには、コスペクトルの山に対応して山あるいは谷が生じている。すなわち境界層の内層と外層でその符号が異なり、変動速度成分 u^* と w の位相が反転していることを示している。これは、大規模渦が境界層内全体に互っていることを示唆するものである。

5. おわりに

軸流中で回転する円筒上の層流境界層の特性を数値的に、乱流境界層の平均速度場と

乱流の平均構造を実験的に調べた。

まず層流境界層については、層外主流速度が直線的に減少する軸流中で回転する円筒上に発達する境界層を調べた。円筒の回転による順圧力こう配作用は層外逆圧力こう配との相互作用により、特徴的な速度分布をもたらす。回転の効果ははく離を遅らせ、さらにはく離した後に付着した流れをつくる。さらに回転が高まると、壁面でははく離し得ない流れとなるが、境界層中央部に逆流領域が生ずる。また、回転円筒上の流れでは、壁面上のはく離点における特異性は消滅することが示された。

回転円筒上の乱流境界層では、平板乱流境界層で確立している対数速度分布はそのままでは成立せず、著者等の導出した対数速度分布が妥当する。しかし、係数を含めて、さらに検討を要する。乱れの構造パラメータは平板境界層のものより大きくなり、せん断駆動の三次元流の特性を示した。乱れエネルギー収支を明らかにし、境界層の全域で生成と散逸がほぼ釣り合っており、平衡境界層となっていることを示した。さらに変動速度のパワースペクトル、およびコスペクトルとクオドスペクトルには、低波数域にスペクトルの山あるいは谷が現れ、また外層側と内層側でクオドスペクトルの符号の反転が生ずる。これは比較的規則的な大規模渦構造の存在を示唆するものである。

文 献

- (1) 古屋・中村・山下, 機会学会誌, 78-681 (1975), 752-757.
- (2) Nakamura, I., Yamashita, S., *Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, IUTAM Symposium, Berlin, 1982*, Ed. H. H. Fernholz, et al., (1982), 177-187, Springer-Verlag.
- (3) Howarth, L., *Phil. Mag.*, 7th Ser., 42-334 (1951), 1308-1315.
- (4) 中村, 機械学会論文集, 37-299 (1971), 1316-1324.
- (5) Brown, S. N. and Stewartson, K., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1 (1969), 45-72.
- (6) Cebeci, T. and Bradshaw, P., *Momentum Transfer in Boundary Layers*, (1977), Hemisphere Pub. Corp.
- (7) Catherall, D. and Mangler, K.W., *J. Fluid Mech.*, 26-1 (1966), 163-182.
- (8) O'Brien, V., *Phys. Fluids*, 24-6 (1981), 1005-1009.
- (9) 古屋・中村・山下・石井, 機械学会論文集, 42-358 (1976), 1820-1829.
- (10) Furuya, Y. and Nakamura, I., *Trans. ASME, Ser. E*, 37 (1970), 17-24.
- (11) Rao, G.N.V., *Trans. ASME, Ser. E*, 34 (1967), 237-238.
- (12) Rao, G.N.V. and Keshavan, N.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 39 (1972), 25-32.
- (13) 伊藤・山田・今尾・鈴木・水谷, 機械学会論文集, 56-528, B (1990), 2309-2317.
- (14) Nakamura, I., Yamashita, S., Watanabe, T. and Sawaki, Y., *3rd Symposium on Turbulent Shear Flows, U. C. Davis, California, USA*, (1981), 2.7-2.12.
- (15) Ölçmen, M.S. and Simpson, R.L., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 114 (1992), 487-495.
- (16) Lilley, D.G. and Chigier, N.A., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 14 (1971), 573-585.
- (17) 古屋・中村・山下, 機械学会論文集, 44-388 (1978), 4186-4196.
- (18) Klebanoff, P.S., *NACA TR.*, No. 1247 (1955)